
ESTADISTICA GENERAL

- PROBABILIDADES
 - Profesor: Celso Gonzales
-

OBJETIVOS

- **Desarrollar la comprensión de los conceptos básicos de probabilidad.**
- **Definir que es probabilidad**
- **Definir los enfoques clasico, subjetivo, frecuencial y axiomático de la probabilidad.**
- **Definir los conceptos de probabilidad condicional y probabilidad conjunta.**
- **Calcular probabilidades aplicando reglas de la suma y reglas de la multiplicación.**

INTRODUCCIÓN

CONCEPTOS BÁSICOS

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral
- Punto muestral
- Evento
- Eventos mutuamente excluyentes
- Eventos colectivamente exhaustivos
- Eventos independientes

Conceptos Básicos

- **Experimento Aleatorio (ε)**

Son aquellos experimentos que al repetirse bajo las mismas condiciones nos dan resultados diferentes.

- **Espacio muestral (Ω)**

Conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio













Conceptos Básicos

- ε_1 = Lanzar un dado y considerar el resultado obtenido
- ε_2 = Extraer una carta de una baraja y observar el número y el palo
- ε_3 = Lanzar dos dados y observar los resultados de cada una de las caras obtenidas
- ε_4 = Observar el número de autos que pasan por un cruce determinado entre las 8 am y 10 am.
- ε_5 = Medir la corriente que pasa por un alambre de cobre

Conceptos Básicos

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega_2 = \{\text{As de coco, As de corazon, ..., ocho de trebol, ..., rey de espada}\}$
- $\Omega_3 = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (3, 6), \dots, (6, 6)\}$
- $\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$
- $\Omega_5 = \{x/x > 0\}$

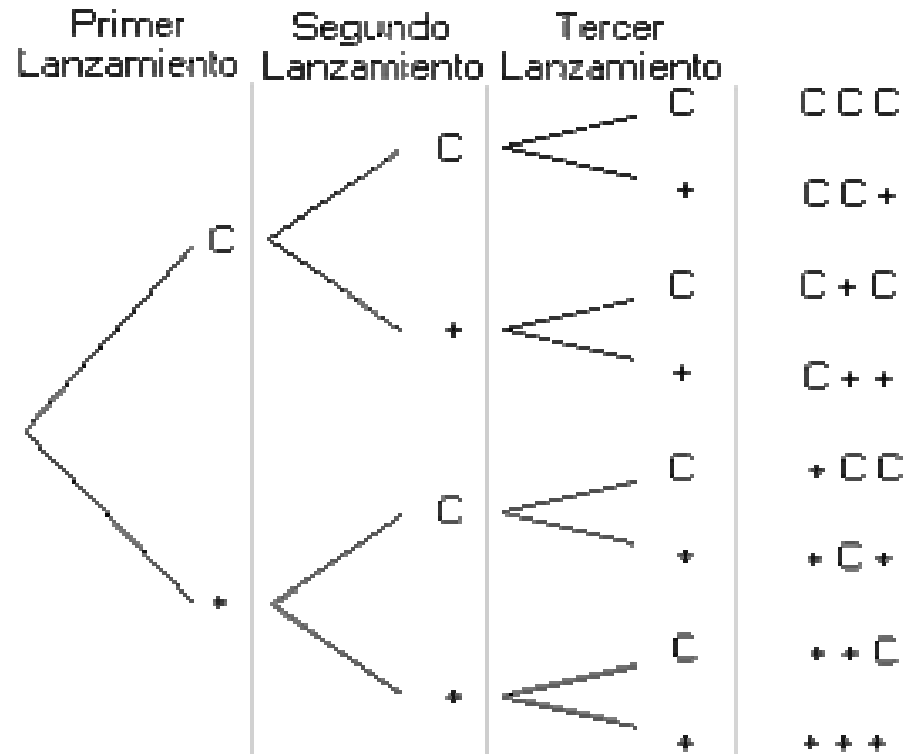
Para el experimento 3 el espacio muestral es

						
	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ejemplo

- A veces, suele ser útil utilizar un gráfico como el de la figura para hallar el espacio muestral de un determinado experimento aleatorio.

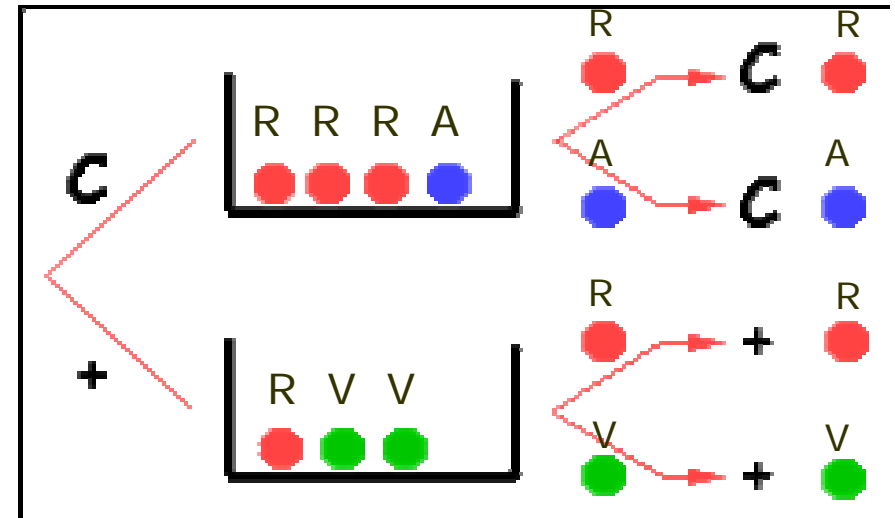
El diagrama de árbol de la figura corresponde al experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces (o tres monedas) y considerar el resultado obtenido.



$$\Omega = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$$

Ejemplo

- Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda. Si sale cara se extrae de una urna, que contiene bolas azules y rojas, una bola y si sale cruz se extrae una bola de otra urna que contiene bolas rojas y verdes.



El espacio muestral de dicho experimento aleatorio es
 $\Omega = \{(C,R), (C,A), (+,R), (+,V)\}$

Conceptos Básicos

- **Evento (A,B,C,...)**

Un evento es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Ejemplos

A=Obtener por lo menos un seis en el lanzamiento de dos dados.

B=Obtener un as en la extracción de una carta de una baraja.

Conceptos Básicos

- **Eventos mutuamente excluyentes**

Son aquellos donde la ocurrencia de uno de ellos excluye la posibilidad de ocurrencia del otro, esto es, no pueden ocurrir juntos.

Sea el experimento del lanzamiento de dos dados

A= Obtener por lo menos un seis

B= Obtener una suma de 6

C= Obtener un número par en el primer lanzamiento

EJEMPLO

Se tienen dos dados, A y B. A es un dado común que tiene en sus caras los números: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, mientras que B tiene en sus caras 1, 1, 1, 2, 2, 3. Si se lanzan los dados en forma simultánea. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a. C = La suma de los puntos obtenidos sea 3.**
- b. D = En ambos dados se obtiene el mismo resultado.**
- c. ¿Son C y D eventos mutuamente excluyentes?**

Conceptos Básicos

- **Eventos colectivamente exhaustivos**

Se dice que A_1, A_2, \dots, A_n son eventos colectivamente exhaustivos si la unión de todos ellos es el espacio muestral Ω .

- **Eventos independientes**

Se dice que A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta a la ocurrencia del otro.

Ejemplo:

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados (o un dado dos veces) y sumar la puntuación obtenida.

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = \{\text{'obtener suma par'}\}$$

$$B = \{2, 5, 7, 11\} = \{\text{'obtener una suma que sea número primo'}\}$$

$$C = \{10, 11, 12\} = \{\text{'obtener una suma mayor o igual que 10'}\}$$

$$D = \{3, 6, 9, 12\} = \{\text{'obtener suma múltiplo de 3'}\}$$

$$F = \{2, 3\} = \{\text{'que la suma sea 2 ó 3'}\}$$

$$\emptyset = \{\text{'obtener una suma mayor que 15'}\} \text{ evento imposible}$$

$$E = \{\text{'Obtener una suma mayor o igual que 2 y menor o igual que 12'}\} \text{ evento seguro}$$

$$M = \{7\} = \{\text{'Obtener un 7'}\} \text{ evento simple}$$

Probabilidad

Es la **cuantificación** de la posibilidad de la ocurrencia de un evento o un suceso.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Si A es un evento seguro, se le asignan el valor de 1.
- Si A es un evento imposible, se le asigna el valor de 0.

Enfoques de probabilidad

- Enfoque Clásico
- Enfoque Frecuencial
- Enfoque Subjetivo
- Enfoque Axiomático

Enfoque clásico

- Suposición: Todos los elementos del espacio muestral son igualmente probables.

$$P(A) = \frac{\textit{Casos favorables}}{\textit{Casos posibles}}$$

EJEMPLO

En el experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados, se define el evento $A = \text{'la suma obtenida sea 7'}$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

Los 36 sucesos elementales del espacio muestral son igualmente probables por lo que

$$\begin{aligned} p(A) &= \text{casos favorables} / \text{casos posibles} = \\ &= 6/36 = 1/6 = 0,1667 \end{aligned}$$

EJEMPLO

En una reunión se encuentran 50 personas, de las cuales 30 son obreros, 5 administradores y 15 ingenieros

- i. Si se selecciona al azar a dos personas: ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea obrero?**
- ii. Si se selecciona a dos personas al azar una tras otra (considerando orden) ¿cuál es la probabilidad de que al menos una persona sea ingeniero?**

Enfoque frecuencial

Se repite el experimento n veces (n grande) la frecuencia relativa de veces que ocurre el evento A en las n repeticiones del experimento es la aproximación de la probabilidad de A

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{r_A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Experimentos hechos por	Número de lanzamientos	Número de caras	Frecuencia relativa de caras
BUFFON	4 040	2 048	0.5069
K. PEARSON	12 000	6 019	0.5016
K. PEARSON	24 000	12 012	0.5005

una característica de los experimentos aleatorios es que muestran una regularidad estadística o estabilidad de las frecuencias relativas. Esto es si efectuamos el experimento muchas veces es prácticamente cierto que la frecuencia relativa de A (frA) es aproximadamente igual a $P(A)$.

Enfoque subjetivo

Las probabilidades subjetivas se basan en una combinación de experiencias del individuo, la opinión personal y el análisis de una situación particular. La probabilidad subjetiva es muy utilizada en la toma de decisiones, donde la probabilidad de diversos eventos no puede determinarse empíricamente.

Enfoque Axiomático

Sea Ω un espacio muestral y A un evento de Ω . Una función P definida en Ω es denominada una probabilidad si P satisface las siguientes condiciones:

(i) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \Omega$

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Sea $\{A_j\}$, $A_j \in \Omega$, $j=1,2,\dots,n$ una sucesión de eventos disjuntos, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum P(A_i)$$

Teoremas de Probabilidad

1. $P(\phi)=0$
 2. $P(A) = 1- P(A^c)$
 3. Si A y $B \in \Omega$ tal que $A \subseteq B$, entonces
 $P(A) \leq P(B)$.
 4. $0 \leq P(A) \leq 1$.
 5. Si A y $B \in \Omega$ son dos eventos cualesquiera, entonces
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **Si $A \cap B = \phi$, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

EJEMPLO

Tenemos dos eventos: A y B estadísticamente dependientes. Si $P(A)=0.39$, $P(B)=0.21$ y $P(A \cup B)=0.47$, encuentre las probabilidades de que:

- I. Se presente tanto A como B**
- II. No se presente ni A ni B**

EJEMPLO

Una empresa encuestadora realizó un estudio sobre la “fidelidad a la marca” de un determinado producto, es decir si sus consumidores estarían dispuestos a continuar consumiendo el mismo producto, a pesar que en el mercado se introdujera uno o más productos con las mismas características del producto que adquieren. Las respuestas de 200 consumidores se clasificaron tomando en cuenta su condición de consumidores (tiempo en que vienen adquiriendo el producto).

	Condición de consumidores			
Fidelidad	Menos de 1 mes (C)	De 1 a 6 meses (D)	De 6 a 10 meses (E)	Más de 10 meses (F)
Continuaría comprándolo(A)	10	30	4	68
Dejaría de comprarlo (B)	24	14	20	30

- i. **¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un consumidor que sea fiel a la marca y venga adquiriendo el producto por 10 o más meses?**
- ii. **¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un consumidor ser fiel o tener más de 10 meses adquiriendo el producto?**

Probabilidad Condicional

Las **probabilidades condicionadas** se calculan una vez que se ha incorporado información adicional a la situación de partida.

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidad Condicional

Donde:

- **$P(B/A)$** es la probabilidad de que ocurra el evento B condicionado a que haya ocurrido el evento A.
- **$P(B \cap A)$** es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B en forma simultánea.
- **$P(A)$** es la probabilidad a priori del evento A

Ejemplo

Se han clasificado 2000 estudiantes universitarios de acuerdo con los puntajes que obtuvieron en el examen de admisión a la universidad. En la siguiente tabla también se muestra la calidad de los colegios en donde terminaron, según la clasificación que hizo un grupo de educadores.

Puntaje	Clase de colegio		
	Inferior	Regular	Superior
Bajo	200	100	100
Medio	150	350	300
Alto	50	150	600

Si un estudiante es elegido al azar determine la probabilidad que:

- Haya obtenido un puntaje alto en el examen.
- Haya terminado en un colegio de nivel regular.
- Haya obtenido un puntaje medio en el examen o haya terminado en un colegio de nivel inferior.
- Haya obtenido un puntaje alto en el examen dado que haya terminado en un colegio de nivel regular.
- Haya obtenido un puntaje bajo en el examen o sea de un colegio regular.

Regla de la multiplicación

La probabilidad de que se den simultáneamente dos eventos (evento intersección de A y B) es igual a la probabilidad a priori del evento A multiplicada por la probabilidad del evento B condicionada al cumplimiento del evento A.

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) * P(B / A) \\ &= P(B) * P(A / B)\end{aligned}$$

- La probabilidad que la construcción de un edificio termine a tiempo es $\frac{17}{20}$, la probabilidad de que haya huelga es $\frac{3}{4}$, y la probabilidad de que la construcción se termine a tiempo dado que no hubo huelga es $\frac{14}{15}$; la probabilidad que haya huelga y no se termine la construcción a tiempo es $\frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad que:
 - La construcción se termine a tiempo y no haya huelga?
 - No haya huelga dado que la construcción se terminó a tiempo?
 - La construcción no se termina a tiempo si no hubo huelga?

Partición de un espacio muestral

Se dice que los eventos B_1, B_2, \dots, B_k forman una partición del espacio muestral Ω si cumple las siguientes condiciones

- (i) $P(B_i) > 0$
- (ii) Son colectivamente exhaustivos.
- (iii) Son mutuamente excluyentes.

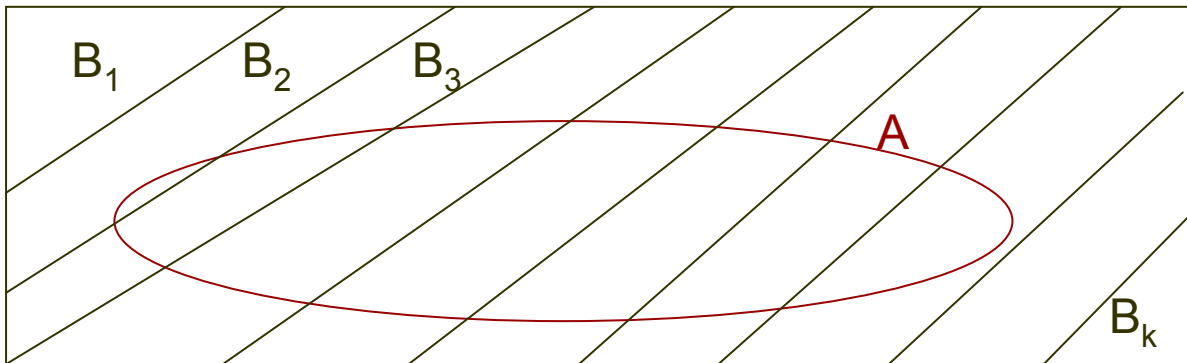
Probabilidad total

El **Teorema de la probabilidad total** nos permite calcular la probabilidad de un evento a partir de probabilidades condicionadas

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) * P(A / B_i)$$

PARTICION Y PROBABILIDAD TOTAL

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) * P(A / B_i)$$



Ejemplo: supongamos que **si llueve** la probabilidad de que ocurra un **accidentes** es 0.12 y si hace **buen tiempo** dicha probabilidad es 0.05.

Esto es $P(A/LL)=0.12$; $P(A/LL^c)=0.05$

Si llueve el 20% de las veces, entonces $P(LL)=0.20$ y $P(LL^c)=0.8$

Asi

$$P(A)=P(LL)*P(A/LL)+P(LL^c)*P(A/LL^c)$$
$$= 0.2*0.12+0.8*0.05=0.064$$

Teorema de Bayes

Teniendo una información adicional (el evento A ocurrió) se recalculan las probabilidades de los elementos de la partición

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) * P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) * P(A / B_i)}$$

A partir de que ha ocurrido el evento A (ha ocurrido un accidente) deducimos las probabilidades del evento B_i (¿estaba lloviendo o hacía buen tiempo?).

$$P(LL/A) = P(LL \cap A) / P(A)$$

$$= [P(LL) * P(A/LL)] / P(A)$$

$$= (0.2 * 0.12) / 0.064 = 0.375$$

Ejemplo

La irregularidad del corte de productos de papel aumenta a medida que las hojas de la cuchilla se desgastan. Sólo el 1% de productos cortados con cuchillas nuevas tiene cortes irregulares, el 3% de los cortados con cuchillas de filo promedio exhiben irregularidades y el 5% de los cortados con cuchillas desgastadas presentan irregularidades. Si el 25% de las cuchillas utilizadas en el proceso de corte son nuevas, el 60% tiene un filo promedio y el 15% de las cuchillas están desgastadas

Ejemplo (continuación)

- ¿Cuál es la proporción de productos que tendrán cortes irregulares?
- Si al seleccionar al azar un producto y se observa que tiene cortes irregulares, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido cortado con cuchillas desgastadas?
- Si se seleccionan seis productos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos tengan cortes irregulares?

- Una gran compañía se posibilita de productos para tiendas de artículos femeninos en centros comerciales, el director de la compañía informa que evalúan las posibilidades como buenas, regulares o malas. Los registros anteriores muestran que 60% de las posibilidades se clasificaron como buenas, 30% como regulares y 10% como malas. De las clasificaciones como especializa en proporcionar evaluaciones de las buenas, 80% dieron utilidades el primer año; de las que se clasificaron como regulares, 60% dieron utilidades el primer año; y de las que se clasificaron como malas, 20% arrojaron beneficios durante el primer año. Gabriel Frete fue uno de los clientes de la compañía que tuvo ganancias durante el año pasado, ¿Cuál es la probabilidad de que se le haya dado una clasificación inicial de mala?

Eventos independientes

- A es independiente de B si

$$P(A/B)=P(A)$$

- B es independiente de A si

$$P(B/A)=P(B)$$

Teorema

- Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral Ω , se dice que A y B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo

Sean A y B dos eventos de modo que $P(A)=0.3$, y $P(B)=0.4$, donde A y B son eventos independientes. Hallar

- La probabilidad de que ocurra solo uno de los eventos
- La probabilidad de que no ocurra ninguno de los eventos
- La probabilidad de que ocurra por lo menos uno de los eventos

- En el ejemplo de la oficina de admisión, si se seleccionan tres alumnos al azar sin reemplazo (con reemplazo) , ¿cuál es la probabilidad que solo dos hayan obtenido un puntaje alto en el examen?
- Sean los eventos A = el estudiante obtuvo un puntaje alto y S = el estudiante proviene de un colegio de clase superior.
 - ¿Son eventos independientes?
 - ¿Son mutuamente excluyentes?